4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \le v_n \le f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

5. Montrer que l'équation $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$. Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B/ 1. Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x)$.

a. Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x) = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

b. En déduire $h\left([0, \frac{1}{2}]\right)$.

3. Soit la fonction k définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Montrer que k est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et calculer $k'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2f^{-1}(x)$.

27 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en 0.
b. Montrer que f est dérivable à droite en 0.
c. Etudier la position de C_f par rapport à sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
d. Etudier les variations de f.
e. Etudier la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$ puis construire C_f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.
b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
c. Construire la courbe C' de la fonction f^{-1} dans le même repère.

B/ On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \ge 0$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \le 1$.

b. Vérifier que $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}, x \in]0, 1]$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \le \frac{1}{2^n}$, puis que (u_n) est convergente.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2u_{n+1}}{1-(u_{n+1})^2}$.

b. En déduire que $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

3. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^n.u_n$, $n \in \mathbb{N}$.. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Qarray.tn -Aqra Bech- Qarray.tn